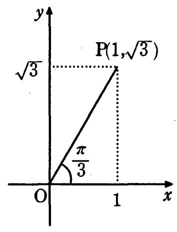
数学演習　No.　　**三角関数の合成公式**　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

　加法定理は三角関数を展開する公式であり，合成公式は三角関数を１つの式にまとめる公式です。三角関数の問題は，ほとんどが合成公式を使って解くことになります。
加法定理と今日の合成公式で三角関数はばっちりできます。

まずは，加法定理の計算練習をします。

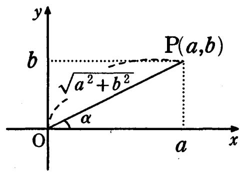
例　$4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ を加法定理を使って変形しなさい。



続いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式を１つの三角関数にまとめる合成公式の解説をします。

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ここで，座標軸上に P(a , b) をとり，x 軸の正の向きと OP とのなす角を α とすると，



$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となるので，

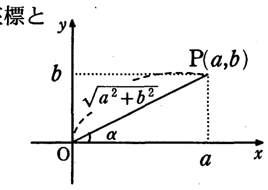
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

まとめ（$a\sin\theta+b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する方法）

$\boxed{Step1}$　$\sin\theta$ の係数 a を x 座標，$\cos\theta$ の係数 b を y 座標とする点P(a , b) を，座標軸上に とる。

$\boxed{Step2}$　OP の長さ r を，三平方の定理より求める。
　　OP $=r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{Step3}$　x 軸の正の向きと OP とのなす角を α とする。
　① 角 α が図から求められれば求めておく。
　② 角 α が図から求められなければ，角 α の説明を
　　「角 α は，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角」
　　と書いておく。



例1　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい。また，最小値と最大値を答えなさい。
(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

解答

Point
x がすべての実数をとるとき，
$-1\leqq\sin x\leqq 1$

最小値　　　　，最大値

(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

解答

最小値　　　　，最大値

(3)　$3\sin\theta+4\cos\theta$

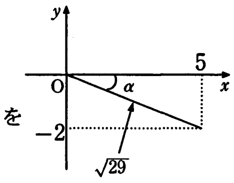
解答

最小値　　　　，最大値

(4)　$5\sin\theta-2\cos\theta$

解答　$5\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{25+4}\sin(\theta+\alpha)$
$=\sqrt{29}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，角 α は，$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{29}}$，$\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{29}}$ を満たす角である。
また，最小値は $-\sqrt{29}$，最大値は $\sqrt{29}$



(5)　$\sin\theta+\cos\theta$　　　（これは大変よくでてくる式です。）

解答

最小値　　　　，最大値

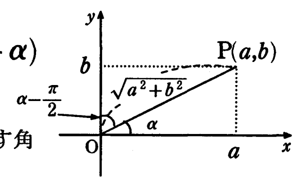
続いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式をコサインで表す方法の解説をしておきます。

さきほどのようにまず，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形しておきます。ただし，角 α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{を満たす角}$$



です。ここで，$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ と $\cos(-x)=\cos x$ を使うと，

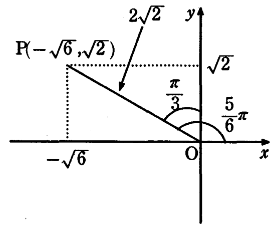
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta+\alpha)\right\}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left\{-\theta-\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left\{\theta+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

この角は y 軸とOP とのなす角です。

例　$-\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$ を $r\cos(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい。　(大学入試センター試験)

解答

$$-\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{2}(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+1}\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=2\sqrt{2}\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\cos\left\{-\theta-\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{3}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\cos\left\{\theta+\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{3}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$



結論を覚えている人は，
一気に答えを出しましょう。

この角は y 軸とOP とのなす角です。