接線と面積

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

Point 1　原始関数

$F'(x)=f(x) \iff F(x)$ は，$f(x)$ の原始関数

Point 2　不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき，$\int f(x)dx=F(x)+C$　(C は積分定数)

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$ より，　次の Point 3 が成り立ちます。

Point 3　積分公式（その1）

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ($n=0,1,2,3,\cdots$) C は積分定数

具体的には，

1　$\int dx=x+C$　　C は積分定数　　$\int 1\,dx$ を $\int dx$ と表す。

2　$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$　　C は積分定数

3　$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$　　C は積分定数

4　$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$　　C は積分定数

5　$\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$　　C は積分定数

………………

さらに，

$$\left\{\frac{1}{3}(x+a)^3\right\}'=\left\{\frac{1}{3}(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)\right\}'$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3+ax^2+a^2x+a^3\right)'$$
$$=x^2+2ax+a^2$$
$$=(x+a)^2$$

よって，次の**とても重要な公式**であるPoint 4が成り立ちます。

Point 4　積分公式（その2）

$\int (x+a)^2dx=\frac{1}{3}(x+a)^3+C$　C は積分定数

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とすると，
$\{kF(x)+lG(x)\}'=kf(x)+lg(x)$ より，次のことが成り立つ。

Point 5　積分公式（その3）

$\int \{kf(x)+lg(x)\}dx=kF(x)+lG(x)+C$　　C は積分定数

また，いわゆる$\frac{1}{6}$**公式**というこれまた**重要な公式**があります。

Point 6　積分公式（その4）　　いわゆる$\frac{1}{6}$公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(証明)

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{\beta^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}\beta^2+\alpha\beta^2-\left(\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}\alpha^2+\alpha^2\beta\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-\frac{3}{6}(\alpha+\beta)^2(\beta-\alpha)+\frac{6}{6}\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta)$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{-(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)\}$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

Point 7　2曲線の交点のx座標と因数分解

$y=ax^2+bx+c$ と $y=mx+c$ とが **2点 $x=\alpha,\beta$ で交わる**ときには，

$$ax^2+bx+c-(mx+n)$$
$$=ax^2+(b-m)x+c-n$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表せます。

$y=ax^2+bx+c$ と $y=mx+c$ とが2点 $x=\alpha,\beta$ で交わる。

$\iff ax^2+bx+c=mx+n$ の解が $x=\alpha,\beta$

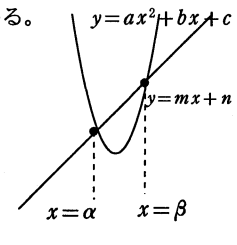
$\iff ax^2+bx+c-(mx+n)=0$ … ①　の解が $x=\alpha,\beta$

$\iff ax^2+(b-m)x+c-n=0$ … ①　の解が $x=\alpha,\beta$

$\iff a\left\{x^2+\frac{b-m}{a}x+\frac{c-n}{a}\right\}=0$ … ①　の解が $x=\alpha,\beta$

$\iff$ 解が $x=\alpha,\beta$ となるためには，

①は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$　…　②　と変形できる。



Point 8　接点のx座標と因数分解

$y=ax^2+bx+c$ と $y=mx+c$ とが**点 $x=\alpha$ で接する**ときには，

$$ax^2+bx+c-(mx+n)$$
$$=ax^2+(b-m)x+c-n$$
$$=a(x-\alpha)^2$$

と表せます。

$y=ax^2+bx+c$ と $y=mx+c$ とが点 $x=\alpha$ で接する。

$\iff ax^2+bx+c=mx+n$ の解が $x=\alpha$

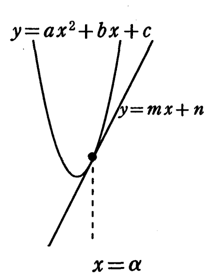
$\iff ax^2+bx+c-(mx+n)=0$ … ①　の解が $x=\alpha$

$\iff ax^2+(b-m)x+c-n=0$ … ①　の解が $x=\alpha$

$\iff a\left\{x^2+\frac{b-m}{a}x+\frac{c-n}{a}\right\}=0$ … ①　の解が $x=\alpha$

$\iff$ 解が $x=\alpha$ となるためには，

①は $a(x-\alpha)^2=0$　…　②　と変形できる。

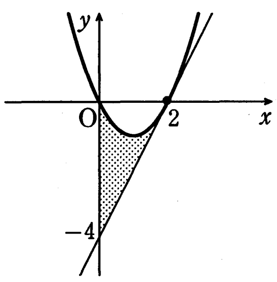


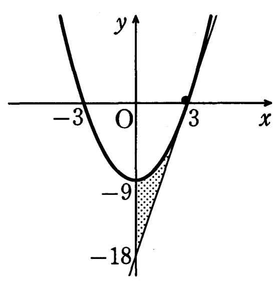
接線と面積

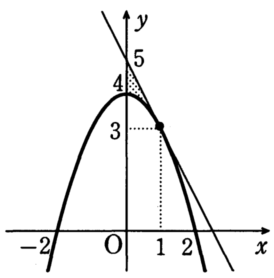
(　)組(　)番　名前(　　　　　　)

例題 1　次の放物線と y 軸，および放物線上の与えられた点における接線 $y=mx+n$ で囲まれた部分の**面積**を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$，$(2,\ 0)$　　(2)　$y=x^2-9$，$(3,\ 0)$　　(3)　$y=-x^2+4$，$(1,\ 3)$







(解)

(1)　$f(x)=x^2-2x$ とおくと　$f'(x)=2x-2$

$f'(2)=2\cdot2-2=2$ から，点 $(2,\ 0)$ における接線の方程式は　$y-0=2(x-2)$

すなわち　　$y=2x-4$

$0\leqq x\leqq2$ で常に $x^2-2x\geqq2x-4$ であるから

$$S=\int_0^2\{(x^2-2x)-(2x-4)\}dx=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot2^2+4\cdot2\right)-0=\frac{8}{3}$$

(2)　$f(x)=x^2-9$ とおくと　$f'(x)=2x$

$f'(3)=2\cdot3=6$ から，点 $(3,\ 0)$ における接線の方程式は　$y-0=6(x-3)$

すなわち　　$y=6x-18$

$0\leqq x\leqq3$ で常に $x^2-9\geqq6x-18$ であるから

$$S=\int_0^3\{(x^2-9)-(6x-18)\}dx=\int_0^3(x^2-6x+9)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot3^2+9\cdot3\right)-0=9$$

(3)　$f(x)=4-x^2$ とおくと　$f'(x)=-2x$

$f'(1)=-2\cdot1=-2$ から，点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式は　$y-3=-2(x-1)$

すなわち　　$y=-2x+5$

$0\leqq x\leqq1$ で常に $-2x+5\geqq4-x^2$ であるから

$$S=\int_0^1\{(-2x+5)-(4-x^2)\}dx=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}-1^2+1\right)-0=\frac{1}{3}$$

($\frac{1}{6}$公式を使った時間短縮ができる解答)

(1)

$\begin{cases}y=x^2-2x\\y=mx+n\end{cases}$ の交点の x 座標が 2

$\Leftrightarrow x^2-2x=mx+n\cdots$①の解が 2

$\Leftrightarrow x^2-2x-(mx+n)=0\cdots$①の解が 2

$\Leftrightarrow x^2-(2+m)x-n=0\cdots$①の解が 2

$\Leftrightarrow$①は $(x-2)^2=0$ と表される。

(2)

$\begin{cases}y=x^2-9\\y=mx+n\end{cases}$ の交点の x 座標が 3

$\Leftrightarrow x^2-9=mx+n\cdots$①の解が 3

$\Leftrightarrow x^2-9-(mx+n)=0\cdots$①の解が 3

$\Leftrightarrow x^2-mxx-9-n=0\cdots$①の解が 3

$\Leftrightarrow$①は $(x-3)^2=0$ と表される。

(3)

$\begin{cases}y=mx+n\\y=-x^2+4\end{cases}$ の交点の x 座標が 1

$\Leftrightarrow mx+n=-x^2+4\cdots$①の解が 1

$\Leftrightarrow mx+n-(-x^2+4)=0\cdots$①の解が 1

$\Leftrightarrow x^2+mx+n-4=0\cdots$①の解が 1

$\Leftrightarrow$①は $(x-1)^2=0$ と表される。

接線と面積

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

例題2　放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(-1,\ 8)$，$(3,\ 0)$ における接線で囲まれた図形の**面積**を求めよ。

(解)

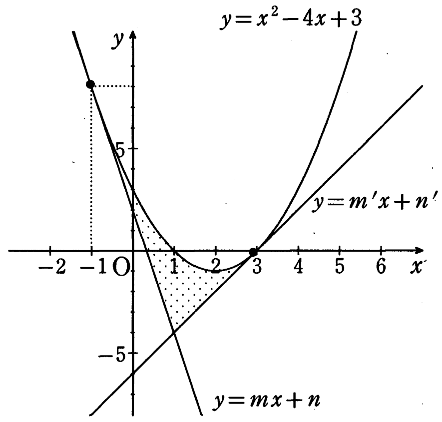
点$(-1,\ 8)$ における接線の方程式を

$y=mx+n$

とし，点$(3,\ 0)$

$y=m'x+n'$

とする。



$\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ y=mx+n \end{cases}$ の交点のx座標が -1

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=mx+n$ …①の解が-1

$\Leftrightarrow x^2-4x+3-(mx+n)=0$ …①の解が-1

$\Leftrightarrow x^2-(4+m)x+3-n=0$ …①の解が-1

$\Leftrightarrow$①は$(x+1)^2=0$ と表される。

$\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ y=m'x+n' \end{cases}$ の交点のx座標が3

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=m'x+n'$ …①の解が3

$\Leftrightarrow x^2-4x+3-(m'x+n')=0$ …①の解が3

$\Leftrightarrow x^2-(4+m')x+3-n'=0$ …①の解が3

$\Leftrightarrow$①は$(x-3)^2=0$ と表される。

例題3　放物線 $y=x^2-6x+10$ と，この放物線上の点 $(2,\ 2)$，$(6,\ 10)$ における接線で囲まれた図形の**面積**を求めよ。

(解)

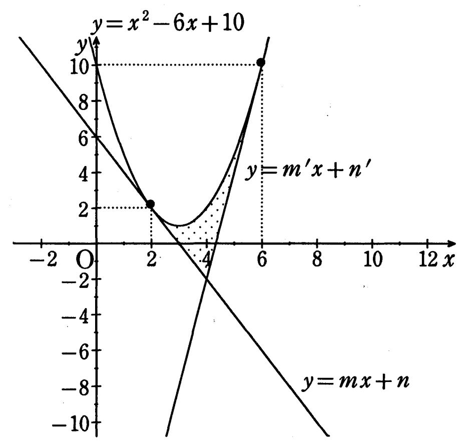
点$(2,\ 2)$ における接線の方程式を

$y=mx+n$

とし，点$(6,\ 10)$

$y=m'x+n'$

とする。



$\begin{cases} y=x^2-6x+10 \\ y=mx+n \end{cases}$ の交点のx座標が 2

$\Leftrightarrow x^2-6x+10=mx+n$ …①の解が2

$\Leftrightarrow x^2-6x+10-(mx+n)=0$ …①の解が2

$\Leftrightarrow x^2-(6+m)x+10-n=0$ …①の解が2

$\Leftrightarrow$①は$(x-2)^2=0$ と表される。

$\begin{cases} y=x^2-6x+10 \\ y=m'x+n' \end{cases}$ の交点のx座標が6

$\Leftrightarrow x^2-6x+10=m'x+n'$ …①の解が6

$\Leftrightarrow x^2-6x+10-(m'x+n')=0$ …①の解が6

$\Leftrightarrow x^2-(6+m')x+10-n'=0$ …①の解が6

$\Leftrightarrow$①は$(x-6)^2=0$ と表される。

例題 4　放物線 $y=-x^2+2x$ を C_1 とし，C_1 上に点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ をとる。ただし，a は $0<a<2$ を満たす定数とする。

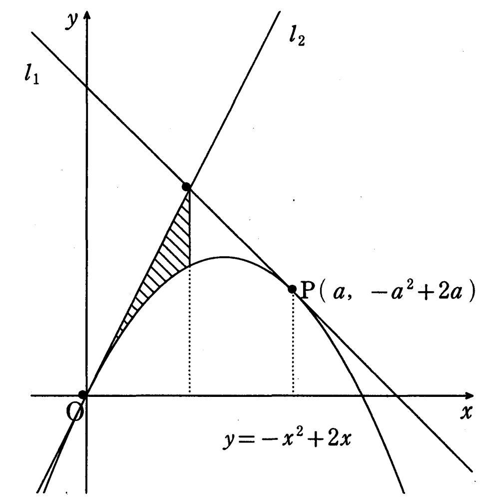
(1)　P における C_1 の接線 l_1 の方程式を求めよ。
原点 O における C_1 の接線を l_2 とすると，l_1 と l_2 との交点 Q の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=\dfrac{a}{2}$，l_2 および C_1 で囲まれた図形の面積 S_1 を求めよ。

(3)　放物線 $y=px^2+qx+r$ を C_2 とする．C_2 が 3 点 O，P，Q を通るとき，p，q，r を求めよ。
このとき C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S_2 を求めよ。
したがって $S_2=$ ア $\boxed{}$ S_1 が成り立つ。アにあてはまる数を求めよ。

（解）

（1）



（2）

（3）$y=px^2+qx+r$ が，3 点 O(0, 0)，$\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ a\right)$ を通るから

$r=0$，$-a^2+2a=pa^2+qa+r$ …②，$a=\dfrac{pa^2}{4}+\dfrac{qa}{2}+r$…③

②－③×2 より，

$-a^2+2a=pa^2+qa$

$2a=\dfrac{p}{2}a^2+qa$

$-a^2=\dfrac{p}{2}a^2$

$\left(\dfrac{p}{2}+1\right)a^2=0$

$a^2\neq 0$ より，$\dfrac{p}{2}+1=0$　から $\dfrac{p}{2}=-1$　　よって，$p=-2$　…④

④を③に代入すると，$a=-a^2+\dfrac{q}{2}a$

$a^2+2a=qa$

$q=a+2$

これを解いて　$p=-2$，$q=a+2$，$r=0$

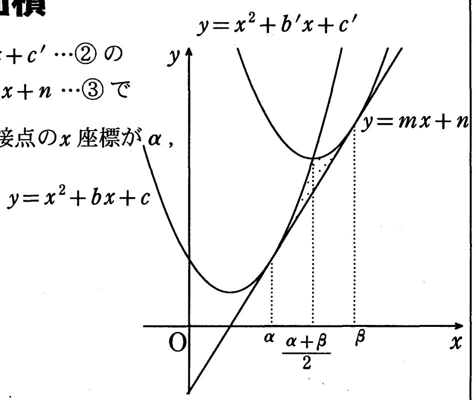
$S_2=\int_0^a\{(px^2+qx+r)-(-x^2+2x)\}dx=\int_0^a(-x^2+ax)dx=-\left\{-\dfrac{1}{6}(a-0)^3\right\}=\dfrac{a^3}{6}$

したがって　$S_2=4S_1$

$Point\,9$　共通接線と面積

$y=x^2+bx+c$ …① と $y=x^2+b'x+c'$ …② の両方に接する直線（共通接線）$y=mx+n$ …③ で囲まれた部分の**面積**は，①と③の接点の x 座標が α，②と③の接点の x 座標が β のとき，

$$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$



(証明)

$y=x^2+bx+c$ …① と $y=x^2+b'x+c'$ …② の交点の x 座標は，

$x^2+bx+c=x^2+b'x+c'$

$(b-b')x=c'-c$

$x=\dfrac{c'-c}{b-b'}$　…④

ここで，$y=x^2+bx+c$ …①　と $y=mx+n$ …③　との接点の x 座標が α より，

$x^2+bx+c=mx+n$

$x^2+(b-m)x+(c-n)=0$　…⑤

は，$(x-\alpha)^2=0$ と表される。

つまり，$x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$　…⑥

と表される。そこで，⑤と⑥の係数を比較すると，

$b-m=-2\alpha$，$c-n=\alpha^2$

よって，$b=m-2\alpha$，$c=n+\alpha^2$　…⑦

同様に，$y=x^2+b'x+c'$ …②　と $y=mx+n$ …③　との接点の x 座標が β より，

$x^2+b'x+c'=mx+n$

$x^2+(b'-m)x+(c'-n)=0$　…⑧

は，$(x-\beta)^2=0$ と表される。

つまり，$x^2-2\beta x+b^2=0$　…⑨

と表される。そこで，⑧と⑨の係数を比較すると，

$b'-m=-2\beta$，$c'-n=\beta^2$

よって，$b'=m-2\beta$，$c'=n+\beta$　…⑩

⑦と⑩を④に代入すると，$x=\dfrac{n+\beta^2-(n+\alpha^2)}{m-2\alpha-(m-2\beta)}$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって，求める面積は，

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2+bx+c-(mx+n)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2+b'x+c'-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left\{-\frac{(\beta-\alpha)}{2}\right\}^3$$

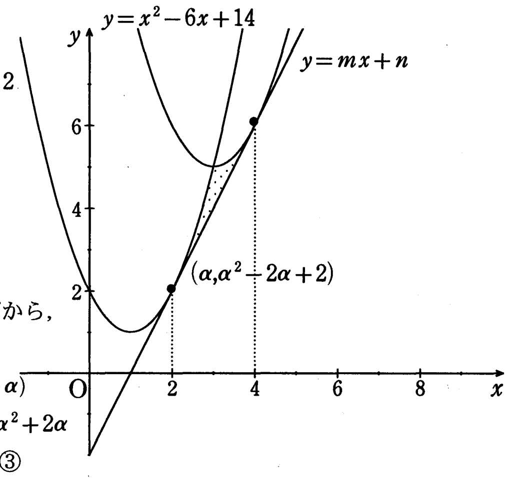
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

例題5

$y=x^2-2x+2$　…①，$y=x^2-6x+14$ …② と①と②の両方に接する直線（共通接線）$y=mx+n$　…③ とで囲まれる**面積**を求めよ。

(解)



$y=x^2-2x+2$　…① 上の接点を

$(\alpha,\alpha^2-2\alpha+2)$ とすると，

$y=x^2-2x+2$ より，$y'=2x-2$ だから，

接線の方程式は，

$y-(\alpha^2-2\alpha+2)=(2\alpha-2)(x-\alpha)$

$y-\alpha^2+2\alpha-2=(2\alpha-2)x-2\alpha^2+2\alpha$

$y=(2\alpha-2)x-\alpha^2+2$　…　③

$y=x^2-6x+14$　…② 上の接点を

$(\beta,\beta^2-6\beta+14)$ とすると，

$y=x^2-6x+14$ より，$y'=2x-6$ だから，

接線の方程式は，

$y-(\beta^2-6\beta+14)=(2\alpha-6)(x-\beta)$

$y-\beta^2+6\beta-14=(2\beta-6)x-2\beta^2+6\beta$

$y=(2\beta-6)x-\beta^2+14$　…　④

③と④は同じ式なので，対応する部分を比較すると，

$2\alpha-2=2\beta-6$　　，$-\alpha^2+2=-\beta^2+14$

$2\alpha=2\beta-4$　　，$\alpha^2=\beta^2-12$　…　⑥

$\alpha=\beta-2$　…　⑤

⑤を⑥に代入すると，

$(\beta-2)^2=\beta^2-12$

$\beta^2-4\beta+4=\beta^2-12$

$-4\beta=-16$

$\beta=4$

このとき，⑤から，$\alpha=4-2=2$

$\begin{cases}y=x^2-2x+2\\ y=mx+n\end{cases}$ の交点の x 座標が 2

$\Leftrightarrow x^2-2x+2=mx+n$ …①の解が 2

$\Leftrightarrow x^2-2x+2-(mx+n)=0$ …①の解が 2

$\Leftrightarrow x^2-(2+m)x+2-n=0$ …①の解が 2

$\Leftrightarrow$ ①は $(x-2)^2=0$ と表される。

$\begin{cases}y=x^2-6x+14\\ y=m'x+n'\end{cases}$ の交点の x 座標が 4

$\Leftrightarrow x^2-6x+14=m'x+n'$ …①の解が 4

$\Leftrightarrow x^2-6x+14-(m'x+n')=0$ …①の解が 4

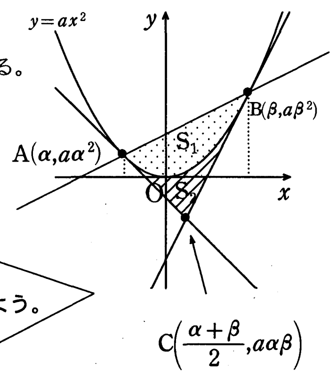
$\Leftrightarrow x^2-(6+m')x+14-n'=0$ …①の解が 4

$\Leftrightarrow$ ①は $(x-4)^2=0$ と表される。

*Point*10　2次関数の特性

2次関数 $y=ax^2\ (a>0)$ 上の点A$(\alpha, a\alpha^2)$, B$(\beta, a\beta^2)$ における**接線の交点**をCとする。

また，直線ABと放物線 $y=ax^2$ で囲まれた部分の**面積**をS_1，点A，Bにおける接線と放物線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の**面積**をS_2とすると，次が成り立つ。



（1） $C\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$ ← 覚えよう。

（2） $S_1 : S_2 = 2:1$

（証明）

（1） $y=ax^2$より，$y'=2ax$

したがって，点A$(\alpha, a\alpha^2)$における接線の傾きは$2a\alpha$より，点A$(\alpha, a\alpha^2)$における接線の方程式は，

$y-a\alpha^2=2a\alpha(x-\alpha)=2a\alpha x-2a\alpha^2$

$y=2a\alpha x-a\alpha^2$　　… ①

また，点B$(\beta, a\beta^2)$における接線の傾きは$2a\beta$より，点B$(\beta, a\beta^2)$における接線の方程式は，

$y-a\beta^2=2a\beta(x-\beta)=2a\beta x-2a\beta^2$

$y=2a\beta x-a\beta^2$　　… ②

①，②の交点の x 座標を求めると，

$2a\alpha x-a\alpha^2=2a\beta x-a\beta^2$

$2a(\beta-\alpha)x=a(\beta^2-\alpha^2)$

よって，$x=\dfrac{a(\beta^2-\alpha^2)}{2a(\beta-\alpha)}-\dfrac{a(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2a(\beta-\alpha)}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　　… ③

③を①に代入すると，

$y=2a\alpha\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-a\alpha^2=a\alpha^2+a\alpha\beta-a\alpha^2=a\alpha\beta$

ゆえに，$C\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$ ← 点Cの x 座標は点A，Bの x 座標の中点である。

（2） S_1の面積を求める。

2点A$(\alpha, a\alpha^2)$，B$(\beta, a\beta^2)$を通る直線の方程式を $y=mx+n$ とおくと，$y=ax^2$ と $y=mx+n$ との交点の x 座標がα，βより，

$ax^2=mx+n$　つまり　$ax^2-mx-n=0$

の解がα，βだから，

$ax^2-mx-n=a(x-\alpha)(x-\beta)$

と因数分解できる。

よって，$S_1=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{(mx+n)-ax^2\}dx$

$=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{-(ax^2-mx-n)\}dx$

$=-a\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-a\left\{-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$

$=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ ← S_1の面積を求める公式

S_2の面積を求める。

$S_2=\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{ax^2-(2a\alpha x-a\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta\{ax^2-(2a\beta x-a\beta^2)\}dx$

$=\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta a(x^2-2\beta x+\beta^2)dx$

$=a\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta(x-\beta)^2dx$

$=a\left[\dfrac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\dfrac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta$

$=\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-0+0-\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3$

$=\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$

$=\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{24}+\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{24}$

$=\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}$ ← S_2の面積を求める公式

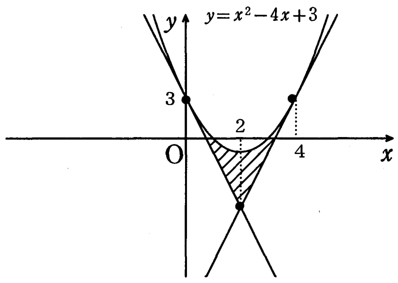
ゆえに，$S_1 : S_1=\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{6}:\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}=\dfrac{2a(\beta-\alpha)^3}{12}:\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}=2:1$

接線と面積

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

例題6　放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 (4, 3)，(0, 3) における接線とで囲まれた部分の**面積**を求めよ。

(解)



$y=x^2-4x+3$　　$y'=2x-4$

点 (4, 3) における接線の方程式は，

$y=4(x-4)+3$ から $y=4x-13$

点 (0, 3) における接線の方程式は，

$y=-4x+3$

この 2 つの接線の交点の x 座標は，

$4x-13=-4x+3$ から　　$x=2$

したがって，求める面積は

$$S=\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_2^4=\frac{16}{3}$$

(別解) 公式より，

$$\frac{1}{12}(4-0)^3=\frac{4\cdot4\cdot4}{12}=\frac{16}{3}$$