Point　有名な極限

（1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\text{中位の}\infty}{x}}{\underset{\text{強い}\infty}{e^x}}=0$　　一般に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\text{中位の}\infty}{x^n}}{\underset{\text{強い}\infty}{e^x}}=0$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\text{弱い}\infty}{\log x}}{\underset{\text{中位の}\infty}{x}}=0$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$

（証明）

（1）　$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，

$f'(x)=e^x-x$　，　$f''(x)=e^x-1$

$x>0$ では，$f''(x)>0$ だから，$f'(x)$ は単調増加である。

したがって，$f'(x)>f'(0)=1>0$

つまり，$x>0$ では，$f'(x)>0$ だから，$f(x)$ は単調増加である。

よって，$f(x)>f(0)=1>0$ より，　$e^x-\dfrac{1}{2}x^2>0$

$e^x>\dfrac{1}{2}x^2$　から　$0<\dfrac{1}{2}x^2<e^x$

$0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{2}{x}$　（∵ $x>0$）

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ だから，**はさみうちの定理**より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ において，$x=nt$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to\infty$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{(nt)^n}{e^{nt}}=\lim_{t\to\infty}n^n\left(\frac{t}{e^t}\right)^n=n^n\times0=0$

（2）　$e^x=t$ とおくと，$x=\log t$ で $x\to\infty$ のとき，$t\to\infty$

よって，$0=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}$ が得られる。

つまり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

（3）　（2）において，$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to+0$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ より，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to+0}t\log\frac{1}{t}=\lim_{t\to+0}t(\log1-\log t)=\lim_{t\to+0}(-t\log t)=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t\log t=0$

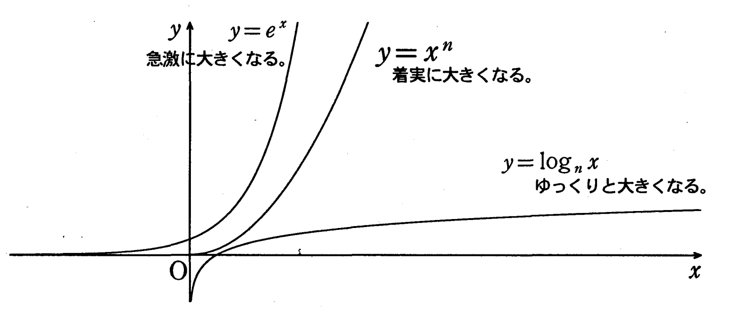
ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$

Point　無限大の序列（この感覚を持つことは大切）

弱い∞　　　　中位の∞　　　　強い∞

$\cdots,\ \log_3x,\ \log_2x,\ \cdots,\ x^{\frac{1}{2}},\ x,\ x^2,\ x^3,\ \cdots,\ 2^x,\ e^x,\ 3^x,\ \cdots$

遅い　←　$\boxed{\text{無限大になるスピード}}$　→　速い



例題　次の**極限**を求めよ。

（1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{e^x}$

（4）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x}$

（5）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{5^x}$

（6）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_5x}{5^x}$

（7）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_5x}{e^x}$

（8）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_4x}{2^x}$

（9）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_4x}{10^x}$

（10）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2x}{x}$

（11）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_ex}{x^5}$

（12）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_6x}{x^{10}}$

（13）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}$

（14）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2}$

（15）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\log_2x}$

（16）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\log_{10}x}$

（17）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log_5x}$

（18）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{\log_5x}$

（19）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\log_5x}$

（20）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log_ex}$