【関数 $y=f(x)$ のグラフの概形】

チェック項目

① 定義域・値域
② 対称性・周期性
③ 軸との共有点・通過点
④ 増減表・極値
⑤ 第２次導関数・凹凸
⑥ 極限
⑦ 漸近線

① **定義域** … x のとり得る値の範囲に制限はないか。

・分数形における分母$\neq 0$　　・偶数乗根の中$\geqq 0$

・対数形における真数>0　　・$\tan x$ の $x \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi$

値域 … y のとり得る値の範囲に制限はないか。

・偶数乗$\geqq 0$　　・偶数乗根$\geqq 0$　　・指数形$\geqq 0$

・$-1 \leqq \sin x \leqq 1$　　・$-1 \leqq \cos x \leqq 1$

・$\left| x+\dfrac{1}{x} \right| \geqq 2$ （逆数の和の絶対値は２以上）

② **対称性**

・奇関数（ $f(-x)=-f(x)$ が成立 ）は原点に関して対称である。

・偶感数（ $f(-x)=f(x)$ が成立）は y 軸に関して対称である。

周期性

・$\sin x$, $\cos x$ の周期は 2π

・$\tan x$ の周期は π

③ **軸との共有点**

・y 軸との共有点は、$x=0$ を代入して y の値を求める。

・x 軸との共有点は、$y=0$ を代入して x の値を求める。

通過点

・x に適当な値を代入して y の値を求める。

④ **増減表・極値**

・$f'(x)=0$ となる x の値を求め、さらに、微分可能でない x 、定義域の端となる x について、増減表に欄をとり、それらの間における $f'(x)$ の符号を調べ、それに伴う $f(x)$ の増減、極値を求める。

⑤ **第２次導関数・凹凸**

・$f''(x)=0$ となる x の値を求め、増減表に欄を追加し、曲線の凹凸、変曲点を調べる。

⑥ **極限**

・$x \to \pm\infty$ のとき　　・定義域の端

・不連続点や微分可能でない点の前後

⑦ **漸近線**

【漸近線の求め方】を参考に漸近線を求める。

さらに、次のような点にも注意してみるとよい。

⑧ **合成という見方**

・$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフは、$y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x}$ のグラフを書き、各 x に対して y_1+y_2 の値を y 座標とする点を表示していくことでイメージすることができる。

・$y=x+\sin x$ のグラフも同様。

⑨ **導関数の極限**

・定義域の端や、微分不能の点の前後での $f'(x)$ の極限を調べてみる。このことから、接線の傾きの変化が分かるので、曲線の概形を考えることができる。

⑩ **式変形**

・$y=\sqrt{1-x^2}$ は、両辺２乗すると、$x^2+y^2=1$ となり、$y \geqq 0$ であることに注意すると、単位円 $x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ の部分であることが分かる。

次の関数について、上記の点に注意し、概形を把握してみよう。

① $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　② $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

③ $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$　　④ $f(x)=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

⑤ $f(x)=x^2e^x$　　⑥ $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$

⑦ $f(x)=\cos 2x+4\sin x-1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　⑧ $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}$ （a は正の定数とする）

⑨ $f(x)=x+\sin x$ （$-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$）　　⑩ $f(x)=2x+\sqrt{x^2-1}$