【漸近線の求め方】

① $x\to a+0$ のとき、あるいは $x\to a-0$ のとき、$y\to+\infty$ または $y\to-\infty$ となる場合、
直線 $x=a$ が漸近線となる。(一般に、a は定義域の端である)

例) $y=\tan x$ において、$x\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき、$y\to+\infty$ なので、

直線 $x=\frac{\pi}{2}$ は曲線 $y=\tan x$ の漸近線である。

このとき、$x\to\frac{\pi}{2}+0$ のとき、$y\to-\infty$ でもある。

例) $y=\frac{1}{x-2}$ において、$x\to 2-0$ のとき、$y\to-\infty$ なので、

直線 $x=2$ は曲線 $y=\frac{1}{x-2}$ の漸近線である。

このとき、$x\to 2+0$ のとき、$y\to+\infty$ でもある。

例) $y=\log x$ において、$x\to+0$ のとき、$y\to-\infty$ なので

直線 $x=0$ (y 軸)は曲線$y=\log x$ の漸近線である。

② $x\to+\infty$ のとき、あるいは $x\to-\infty$ のとき、$y\to 0$ となる場合、x 軸(直線 $y=0$)が漸近線となる。

例) $y=\frac{1}{x-2}$ において、$x\to\pm\infty$ のとき、$y\to 0$ なので、x 軸が漸近線となる。

例) $y=e^x$ において、$x\to-\infty$ のとき、$y\to 0$ なので、x 軸が漸近線となる。

③ $f(x)=g(x)+h(x)$ かつ $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ ならば、$y=f(x)$ のグラフは、$x\to+\infty$ のとき、
曲線(直線) $y=g(x)$ に漸近する。このことは、$x\to-\infty$ でもいえる。

例) $y=\frac{x^2+1}{x}$ について、$\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$ であり、$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ なので、

$x\to+\infty$ のとき、この曲線は、直線 $y=x$ に漸近する。

また、$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ でもあるので、直線 $y=x$ は $x\to-\infty$ のときの
漸近線でもある。

例) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ について、$\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$ であり、$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$ なので、

$x\to\pm\infty$ のとき、この曲線は、直線 $y=x+1$ に漸近する。

④ $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$ (ただし、a , b は有限値) であれば、

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=\lim_{x\to\infty}[\{f(x)-ax\}-b]=b-b=0$ となり、$x\to\infty$ のとき、

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+b$ が近づくので、$x\to\infty$ のとき、

直線 $y=ax+b$ がこの曲線の漸近線となる。このことは、$x\to-\infty$ のときもいえる。

例) $y=x+\sqrt{x^2+1}$ について、$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2$ なので、

$x\to\infty$ のときの漸近線があれば、その傾きは 2 である。また、y 切片を b とすると、

$b=\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ となる。

よって、$x\to\infty$ のときのこの曲線の漸近線の方程式は $y=2x$ となる。

また、$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1-1=0$ なので、

$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$ から $x\to-\infty$ のときこの曲線は

x 軸(直線 $y=0$)に漸近する。(実はこのことは、②からもいえている。)

例) $y=x^2$ については、$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$ となり、$x\to\infty$ のとき、この曲線は直線に
漸近することはない。

例) $y=x-2\sqrt{x}$ について、$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=1$ となり、$x\to\infty$ のときの

漸近線があるならば、その傾きは 1 である。そこで、y 切片を b とすると、

$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}(-2\sqrt{x})=-\infty$ となるので、$x\to\infty$ のとき、この曲線は直線に漸近するこ
とはない。