数学演習　No.　　**近似式**　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

機能的に働くのではないかと思います。
曲線を1次式，2次式，…で近似させてみます。

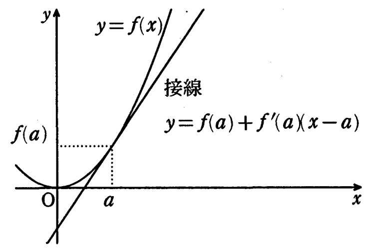
微分可能な曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における**接線の方程式**は，

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

より，

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

と表されます。



この見慣れた接線の公式が、実は曲線 $y=f(x)$ の1次の近似式になっています。上図をみると，$x=a$ の付近では $y=f(x)$ と $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ は全く見分けがつかないほどよく似ています。

よって，$x \fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

と**1次式で近似**できます。

近似精度を上げて，**$f(x)$を2次式で近似**しようとすると，$x \fallingdotseq a$ のとき

$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+p(x-a)^2$　…　①

となります。この p を求めてみます。

（i）①の両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'(x)$　　，右辺 $=f'(a)+2p(x-a)$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f'(a)$，右辺 $=f'(a)$ より一致します。

（ii）さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f''(x)$　　，右辺 $=2p$
　ここで，$x=a$ を代入すると，
　左辺 $=f''(a)$　　，右辺 $=2p$

これを一致させるためには，$f''(a)=2p$ より，$p=\dfrac{f''(a)}{2}=\dfrac{f''(a)}{2!}$

よって，$x \fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

と**2次式で近似**できます。

同様に，**$f(x)$ を3次式で近似**しようとすると，$x \fallingdotseq a$ のとき

$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+q(x-a)^3$　…　②

となります。この q を求めてみます。

（i）②の両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'(x)$　　，右辺 $=f'(a)+f''(a)(x-a)+3q(x-a)^2$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f'(a)$，右辺 $=f'(a)$ より一致します。

（ii）さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f''(x)$　　，右辺 $=f''(a)+6q(x-a)$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f''(a)$，右辺 $=f''(a)$ より一致します。

（iii）さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'''(x)$　　，右辺 $=6q$
　ここで，$x=a$ を代入すると，
　左辺 $=f'''(a)$　　，右辺 $=6q$

これを一致させるためには，$f'''(a)=6q$ より，$q=\dfrac{f'''(a)}{6}=\dfrac{f'''(a)}{3!}$

よって，$x \fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

と**3次式で近似**できます。

Point　テイラー展開

左の公式を一般化すると，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$
$$+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4+\frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5+\cdots$$

となり，曲線 $y=f(x)$ の **$x=a$ 付近の近似公式**となり，曲線 $y=f(x)$ の**テイラー展開**という。

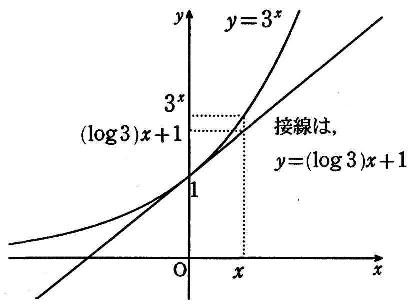
例題1　**$x \fallingdotseq 0$ のとき**，次の関数の**1次の近似式**を作れ。
a は定数とする。

(1) 3^x　(2) $\tan x$　(3) $\log(1+x)$　(4) $\cos(a+x)$

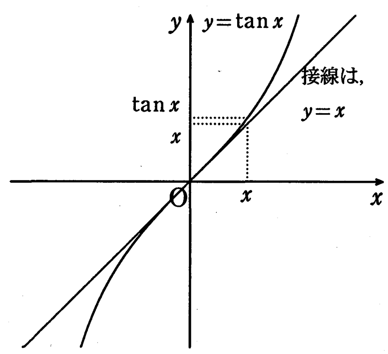
(ヒント) (1)と(2)は点$(0,f(0))$ における接線を考え，(3)は点$(1,f(1))$ における接線を考え，
(4) は点$(a,f(a))$ における接線を考えるとよい。

(解)

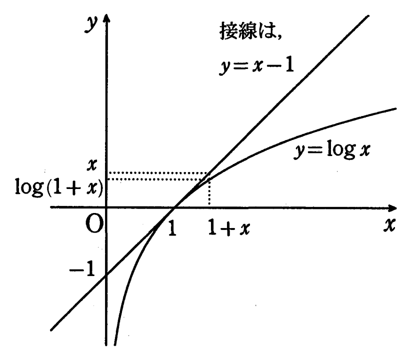
(1) $f(x)=3^x$ とおくと



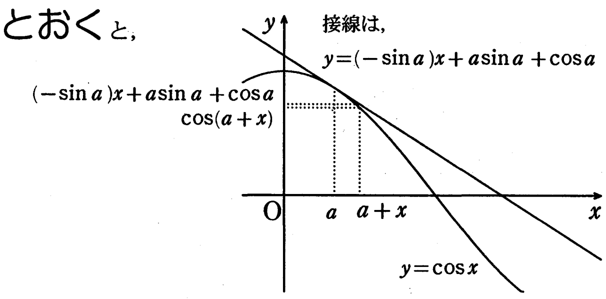
(2) $f(x)=\tan x$ とおくと，



(3) $f(x)=\log x$ とおくと，



(4) $f(x)=\cos x$ とおくと，



機能的に働くのではないかと思います。
曲線を1次式，2次式，…で近似させてみます。

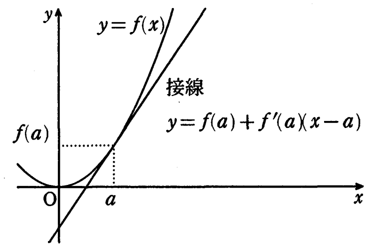
微分可能な曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における**接線の方程式**は，

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

より，

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

と表されます。



この見慣れた接線の公式が、実は曲線 $y=f(x)$ の1次の近似式になっています。上図をみると，$x=a$ の付近では $y=f(x)$ と $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ は全く見分けがつかないほどよく似ています。

よって，$x\fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

と**1次式で近似**できます。

近似精度を上げて，**$f(x)$を2次式で近似**しようとすると，$x\fallingdotseq a$ のとき

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+p(x-a)^2 \quad \cdots ①$$

となります。この p を求めてみます。

(i) ①の両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'(x)$　，右辺 $=f'(a)+2p(x-a)$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f'(a)$，右辺 $=f'(a)$ より一致します。

(ii) さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f''(x)$　，右辺 $=2p$
　ここで，$x=a$ を代入すると，
　左辺 $=f''(a)$　，右辺 $=2p$

これを一致させるためには，$f''(a)=2p$ より，$p=\dfrac{f''(a)}{2}=\dfrac{f''(a)}{2!}$

よって，$x\fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

と**2次式で近似**できます。

同様に，**$f(x)$ を3次式で近似**しようとすると，$x\fallingdotseq a$ のとき

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+q(x-a)^3 \quad \cdots ②$$

となります。この q を求めてみます。

(i) ②の両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'(x)$　，右辺 $=f'(a)+f''(a)(x-a)+3q(x-a)^2$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f'(a)$，右辺 $=f'(a)$ より一致します。

(ii) さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f''(x)$　，右辺 $=f''(a)+6q(x-a)$
　ここで，$x=a$ を代入すると，左辺 $=f''(a)$，右辺 $=f''(a)$ より一致します。

(iii) さらに，両辺を x で微分すると，
　左辺 $=f'''(x)$　，右辺 $=6q$
　ここで，$x=a$ を代入すると，
　左辺 $=f'''(a)$　，右辺 $=6q$

これを一致させるためには，$f'''(a)=6q$ より，$q=\dfrac{f'''(a)}{6}=\dfrac{f'''(a)}{3!}$

よって，$x\fallingdotseq a$ のとき，

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

と**3次式で近似**できます。

Point　テイラー展開

左の公式を一般化すると，

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4+\frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5+\cdots$$

となり，曲線 $y=f(x)$ の **$x=a$ 付近の近似公式**となり，曲線 $y=f(x)$ の**テイラー展開**という。

例題1　**$x\fallingdotseq 0$ のとき**，次の関数の**1次の近似式**を作れ。
a は定数とする。

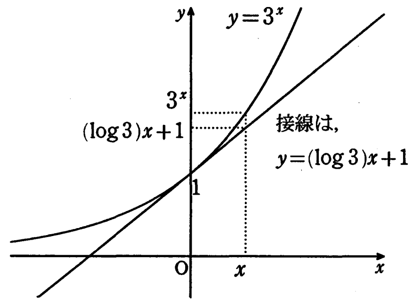
(1) 3^x　　(2) $\tan x$
(3) $\log(1+x)$　　(4) $\cos(a+x)$

(解)

(1) $f(x)=3^x$ とおくと

$f'(x)=3^x\log 3$
$f(0)=1$，$f'(0)=\log 3$ であるから，
接点が点 $(0,1)$ である接線の方程式は，
$y-1=(\log 3)(x-0)$
$y=(\log 3)x+1$

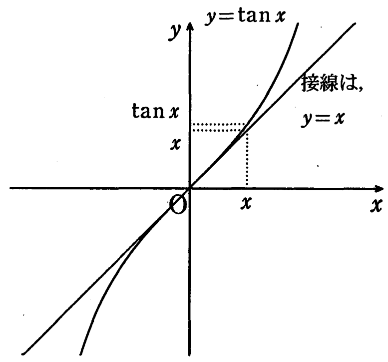
よって，$3^x\fallingdotseq(\log 3)x+1$



(2) $f(x)=\tan x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(0)=0$，$f'(0)=1$ であるから，
接点が点 $(0,0)$ である接線の方程式は，
$y-0=1\cdot(x-0)$
$y=x$

よって，　$\tan x\fallingdotseq x$

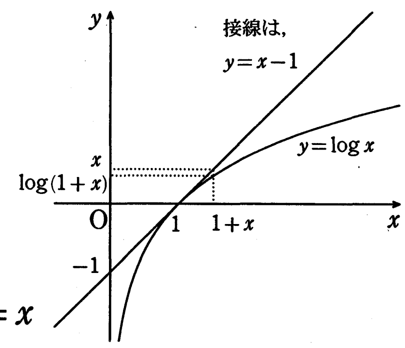


(3) $f(x)=\log x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(1)=0$，$f'(1)=1$ であるから，
接点が点 $(1,0)$ である接線の方程式は，
$y-0=1\cdot(x-1)$
$y=x-1$

よって，

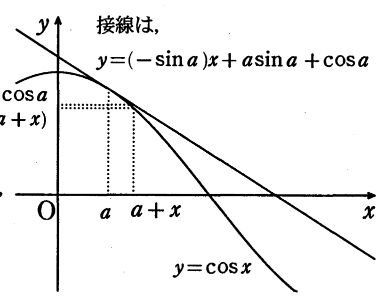
$\log(1+x)\fallingdotseq(1+x)-1=x$



(4) $f(x)=\cos x$ とおくと，

$f'(x)=-\sin x$
$f(a)=\cos a$，
$f'(a)=-\sin a$ であるから，
接点が点 $(a, \cos a)$ である接線の方程式は，
$y-\cos a=(-\sin a)(x-a)$
$y=(-\sin a)x+a\sin a+\cos a$

よって，



$$\cos(a+x)\fallingdotseq(-\sin a)(a+x)+a\sin a+\cos a$$
$$=(-\sin a)x+\cos a$$