No.　　二項定理・多項定理

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　)

問題　次の式を展開しなさい。

文字のかけ算の順序を入れ替えずに書いてみた。

$(a+b)^4$ を展開すると，
各項は，$\alpha\beta\gamma\delta$ の形をしている。
α は，①の中の a または b
β は，②の中の a または b
γ は，③の中の a または b
δ は，④の中の a または b だから，
$\alpha\beta\gamma\delta$ は全部で，$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ 個ある。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　①②③④

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4&=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\\
&=(aa+ab+ba+bb)(a+b)(a+b)\\
&=(aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb)(a+b)\\
&=aaaa+aaab+aaba+aabb+abaa+abab+abba+abbb+baaa+baab\\
&\quad+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb\\
&=\quad a^4+\quad a^3b+\quad a^2b^2+\quad ab^3+\quad b^4
\end{aligned}
$$

a を4個1列に並べる並べ方	a を3個，b を1個1列に並べる並べ方	a を2個，b を2個1列に並べる並べ方	a を1個，b を3個1列に並べる並べ方	b を4個1列に並べる並べ方
1通り	$\frac{4!}{3!}$ 通り	$\frac{4!}{2!2!}$ 通り	$\frac{4!}{2!2!}$ 通り	1通り
or	or	or	or	or
${}_4C_0$ 通り	${}_4C_1$ 通り	${}_4C_2$ 通り	${}_4C_3$ 通り	${}_4C_4$ 通り

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5&=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\\
&=(aaaa+aaab+aaba+aabb+abaa+abab+abba+abbb+baaa+baab\\
&\quad+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb)(a+b)\\
&=aaaaa+aaaab+aaaba+aaabb+aabaa+aabab+aabba+aabbb\\
&\quad+abaaa+abaab+ababa+ababb+abbaa+abbab+abbba+abbbb\\
&\quad+baaaa+baaab+baaba+baabb+babaa+babab+babba+babbb\\
&\quad+bbaaa+bbaab+bbaba+bbabb+bbbaa+bbbab+bbbba+bbbbb\\
&=\quad a^5+\quad a^4b+\quad a^3b^2+\quad a^2b^3+\quad ab^4+\quad b^5
\end{aligned}
$$

a を5個1列に並べる並べ方	a を4個，b を1個1列に並べる並べ方	a を3個，b を2個1列に並べる並べ方	a を2個，b を3個1列に並べる並べ方	a を1個，b を4個1列に並べる並べ方	b を5個1列に並べる並べ方
1通り	$\frac{5!}{4!}$ 通り	$\frac{5!}{3!2!}$ 通り	$\frac{5!}{2!3!}$ 通り	$\frac{5!}{4!}$ 通り	1通り
or	or	or	or	or	or
${}_5C_0$ 通り	${}_5C_1$ 通り	${}_5C_2$ 通り	${}_5C_3$ 通り	${}_5C_4$ 通り	${}_5C_5$ 通り

同様に考えると，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^6&=a^6+\frac{6!}{5!}a^5b+\frac{6!}{4!2!}a^4b^2+\frac{6!}{3!3!}a^3b^3+\frac{6!}{2!4!}a^2b^4+\frac{6!}{5!}ab^5+b^6\\
&=a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+b^6\\
&=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}
$$

$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**は，

$$\frac{n!}{p!q!}a^pb^q\quad（ただし，p+q=n）$$

$\frac{n!}{p!q!}$ は，p 個の a，q 個の b の合計 n 個を1列に並べる順列である。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n&=\frac{n!}{n!0!}a^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}a^{n-1}b+\frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n!}{(n-q)!q!}a^{n-q}b^q\\
&\quad+\cdots+\frac{n!}{1!(n-1)!}ab^{n-1}+\frac{n!}{0!n!}b^n
\end{aligned}
$$

また，次が成り立つ。

$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**は，

$${}_nC_q\,a^pb^q\quad（ただし，p+q=n）$$

${}_nC_q$ は，p 個（$n-q$ 個）の a，q 個の b の合計 n 個を1列に並べる順列である。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n&={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n\\
&=\sum_{q=0}^{n}{}_nC_qa^{n-q}b^q
\end{aligned}
$$

例題　$(3x-2y)^5$ の展開式における x^2y^3 の係数を求めなさい。

解答　一般項は，$\frac{5!}{p!q!}(3x)^p(-2y)^q=\frac{5!}{p!q!}3^p(-2)^qx^py^q$　　ただし，$p+q=5$

であり，x^2y^3 の項は，$p=2$，$q=3$ のときだから，そのときの係数は，

$$\frac{5!}{2!3!}3^2(-2)^3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}\times9\times(-8)=-720$$

別解　一般項は，${}_5C_q(3x)^{5-q}(-2y)^q={}_5C_q3^{5-q}(-2)^qx^{5-q}y^q$

であり，x^2y^3 の項は，$q=3$ のときだから，そのときの係数は，

$${}_5C_3 3^2(-2)^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times9\times(-8)=-720$$

演習　次の各問いに答えよ。

（1）$(2x+y)^5$ の展開式における x^3y^2 の係数を求めなさい。

（2）$(x-7y)^7$ の展開式における x^3y^4 の係数を求めなさい。

No.　二項定理・多項定理

(　　)組(　　)番　名前 (　　　　　　　　　　　　　　　　)

問題　次の式を展開しなさい。

公式です。

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^3$ を展開すると，
各項は，$\alpha\beta\gamma$ の形をしている。
α は，①の中の a または b または c
β は，②の中の a または b または c
γ は，③の中の a または b または c
$\alpha\beta\gamma$ は全部で，3・3・3＝27個ある。

$(a+b+c)^3=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$
$=(aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc)(a+b+c)$
$=aaa+aab+aac+aba+abb+abc+aca+acb+acc$
$\quad +baa+bab+bac+bba+bbb+bbc+bca+bcb+bcc$
$\quad +caa+cab+cac+cba+cbb+cbc+cca+ccb+ccc$

一般項は，$\dfrac{3!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$

$=\ a^3+\ b^3+\ c^3+\quad a^2b+\quad a^2c+\quad b^2a+\quad b^2c+\quad c^2a+\quad c^2b+\quad abc$

aを3個一列に並べる並べ方	bを3個一列に並べる並べ方	cを3個一列に並べる並べ方	aを2個，bを1個一列に並べる並べ方	aを2個，cを1個一列に並べる並べ方	aを1個，bを2個一列に並べる並べ方	bを2個，cを1個一列に並べる並べ方	aを1個，cを2個一列に並べる並べ方	bを1個，cを2個一列に並べる並べ方	aを1個，bを1個，cを1個一列に並べる並べ方
1通り	1通り	1通り	$\frac{3!}{2!}$通り	$\frac{3!}{2!}$通り	$\frac{3!}{2!}$通り	$\frac{3!}{2!}$通り	$\frac{3!}{2!}$通り	$\frac{3!}{2!}$通り	3!通り

一般項は，$\dfrac{4!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$

$(a+b+c)^4$
$=\ a^4+\ b^4+\ c^4+\quad a^3b+\quad a^3c+\quad b^3a+\quad b^3c+\quad c^3a+\quad c^3b$

$\quad +\quad a^2b^2+\quad a^2c^2+\quad b^2c^2+\quad a^2bc+\quad b^2ac+\quad c^2ab$

$=\ a^4+\ b^4+\ c^4+\quad a^3b+\quad a^3c+\quad b^3a+\quad b^3c+\quad c^3a+\quad c^3b$

$\quad +\quad a^2b^2+\quad a^2c^2+\quad b^2c^2+\quad a^2bc+\quad b^2ac+\quad c^2ab$

$(a+b+c)^n$ の展開式の**一般項**は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \quad (\text{ただし，} p+q+r=n)$$

$\dfrac{n!}{p!q!r!}$ は，p 個の a，q 個の b，r 個の c の合計 n 個を1列に並べる順列である。

例題　$(a+b+c)^7$ の展開式における $a^2b^3c^2$ の係数を求めなさい。

解答　一般項は，$\dfrac{7!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$　　ただし，$p+q+r=7$

であり，$a^2b^3c^2$ の項は，$p=2$，$q=3$，$r=2$ のときのだから，そのときの係数は，

$$\frac{7!}{2!3!2!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1\times2\times1}$$
$$=210$$

演習　次の各問いに答えなさい。

(1) $(x+2y+3z)^4$ の展開式における xyz^2 の係数を求めなさい。

(2) $(2x+3y-4z)^6$ の展開式における x^3y^2z の係数を求めなさい。