数学演習　No.

漸化式

pattern 0 （1）$a_{n+1}=ra_n$ … 初項 a_1，公比 r の等比数列より，$a_n=a_1\times r^{n-1}$

（2）$a_{n+1}=a_n+d$ … 初項 a_1，公差 d の等差数列より，

$a_n=a_1+(n-1)d$

このパターン０は，ほとんどの漸化式で使う超基礎です。すぐに答えがだせるようにしてください。

例題　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の**一般項**を求めよ。

（1）$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

（2）$a_1=2$，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　$(n=1,2,3,\cdots)$

（3）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答（1）数列 $\{a_n\}$ は，初項　　　，公比　　　の等比数列より，

$a_n=$

条件より，　$a_1=2$
$a_{n+1}=3a_n$ の n に自然数を順番に代入すると，
$n=1$とすると，$a_2=3a_1=6$
$n=2$とすると，$a_3=3a_2=18$
$n=3$とすると，$a_4=3a_3=54$
$n=4$とすると，$a_5=3a_4=162$
……
したがって，数列$\{a_n\}$は
2，6，18，54，162，…
となっている。

（2）$b_n=a_n-1$**とおく**と，

$b_1=$　　　　，$b_{n+1}=3b_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

数列$\{b_n\}$は，初項　　，公比　　の等比数列より，

$b_n=$

$b_1=a_1-1=2-1=1$
$b_{n+1}=3b_n$ の n に自然数を順番に代入すると，
$n=1$とすると，$b_2=3b_1=3$
$n=2$とすると，$b_3=3b_2=9$
$n=3$とすると，$b_4=3b_3=27$
……
したがって，数列$\{b_n\}$は
1，3，9，27，…
となっている。

数列　a_1，a_2，a_3，a_4，… は，
$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ より，$a_{n+1}=3a_n-2$ であり，
また，$a_1=2$ だから，　2，4，10，28，82，…
である。ここで，この数列$\{a_n\}$は等比数列でも等差数列でもない。
しかし，数列$\{a_n-1\}$　すなわち，数列
a_1-1，a_2-1，a_3-1，a_4-1，…
は，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ より，初項$a_1-1=2-1=1$，
公比３の等比数列となり，一般項が以下のようにすぐにわかる。
$a_n-1=1\times 3^{n-1}$より，$a_n=3^{n-1}+1$

（3）初項$a_1=2$，公差3の等差数列より，

$a_n=2+(n-1)\times 3=2+3n-3=3n-1$

条件より，　$a_1=2$
$a_{n+1}=a_n+3$ の n に自然数を順番に代入すると，
$n=1$とすると，$a_2=a_1+3=5$
$n=2$とすると，$a_3=a_2+3=8$
$n=3$とすると，$a_4=a_3+3=11$
$n=4$とすると，$a_5=a_4+3=14$
……
したがって，数列$\{a_n\}$は
2，5，8，11，14，…
となっている。

pattern 1　$a_{n+1}=pa_n+q$ 型　$(p\neq 1)$

⇒ 手順1　$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ **の形に変形する。**

ただし，α は，$\alpha=p\alpha+q$ を満たす。

（証明）$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ より，$a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$ …①

与式から，$a_{n+1}=pa_n+q$　…②

①＝②より，係数を比較すると，$-p\alpha+\alpha=q$ より，$\alpha=p\alpha+q$

手順2　pattern 0 の利用。

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は，

$a_1-\alpha$，$a_2-\alpha$，$a_3-\alpha$，$a_4-\alpha$，…，$a_{n-1}-\alpha$，$a_n-\alpha$，…

より，初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるので，

一般項は，$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\times p^{n-1}$ より，$a_n=(a_1-\alpha)\times p^{n-1}+\alpha$

例題　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の**一般項**を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　　　　　　　　を解くと，

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+1$ の a_{n+1}とa_nをαで書き替えた式である。

したがって，$a_{n+1}=2a_n+1$ は次のように変形できる。

これより，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項　　　　，公比　　　　の等比数列である。

よって，$a_n+1=$

数列 $\{a_n+1\}$ は
a_1+1，a_2+1，a_3+1，a_4+1，…，$a_{n-1}+1$，a_n+1，…
×2　×2　×2　×2

わかりにくい人は，次のようにおくとよい。
$b_n=a_n+1$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=a_1+1=1+1=2$
これより，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=2$，公比２の等比数列を表すので，$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$
よって，$a_n+1=2^n$ より，$a_n=2^n-1$

漸化式

pattern 2　$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ 型　$(p \neq 1)$

$q(n)$の例
① $q(n)=\alpha$
② $q(n)=an+b$
③ $q(n)=an^2+bn+c$

⇒ 手順1　$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ を解く。

この式は，与えられた漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ の a_{n+1} を $f(n+1)$ で，a_n を $f(n)$ で書き替えた形をしている。

注：$q(n)$ が**定数**　⇒ $f(n)=\alpha$（定数）とする。

$q(n)$ が n の**一次式** ⇒ $f(n)=an+b$ とする。

$q(n)$ が n の**二次式** ⇒ $f(n)=an^2+bn+c$ とする。

手順2

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q(n) \\ -) & f(n+1)=pf(n)+q(n) \\ \hline & a_{n+1}-f(n+1)=p\{a_n-f(n)\} \end{array}$$

を計算する。

手順3　**数列 $\{a_n-f(n)\}$ は，初項 $a_1-f(1)$，公比 p の等比数列である**ので，第 n 項（一般項）は，

$$a_n-f(n)=\{a_1-f(1)\}\times p^{n-1} \quad \text{より，}$$

$$a_n=\{a_1-f(1)\}\times p^{n-1}+f(n)$$

数列 $a_{n+1}-f(n+1)=p\{a_n-f(n)\}$ を図式化すると以下のようになる。

$a_1-f(1)$，$a_2-f(2)$，$a_3-f(3)$，$a_4-f(4)$，…，$a_n-f(n)$，$a_{n+1}-f(n+1)$，…

$\times p$　$\times p$　$\times p$　$\times p$

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$　$(n=1,2,3,\cdots)$

（2）$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+3n+2$　$(n=1,2,3,\cdots)$

（3）$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答（1）$f(n)=\alpha$ とし，これを

$$f(n+1)=2f(n)+1$$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = & 2\,a_n & +\,1 \\ \downarrow & \downarrow & \\ f(n+1)=\alpha & f(n)=\alpha & \end{array}$$

に代入すると，$\alpha=2\alpha+1$

よって，$\alpha=-1$ より，$f(n)=-1$

したがって，$a_{n+1}=2a_n+1$ は次のように変形できる。

$a_{n+1}=2a_n+1$ を $a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$ の形にする。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=2a_n\quad+1 \\ -) & f(n+1)=2f(n)+1 \\ \hline & a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\} \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-f(n)\}$ は，初項 $a_1-f(1)=1-(-1)=2$，公比2の等比数列より，

$$a_n-f(n)=2\times 2^{n-1}=2^n$$

$$a_n=2^n+f(n)$$

$$=2^n-1$$

（2）$f(n)=an+b$ とし，これを

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = & 2\,a_n & +\,(3n+2) \\ \downarrow & \downarrow & \\ f(n+1)=a(n+1)+b & f(n)=an+b & \end{array}$$

$$f(n+1)=2f(n)+3n+2$$

に代入すると，$a(n+1)+b=2(an+b)+3n+2$

$an+a+b=2an+2b+3n+2$

$(a+3)n+(-a+b+2)=0$

この式は，すべての自然数 n に対して成り立つので，

$a+3=0$，$-a+b+2=0$

これを解いて，$a=-3$，$b=-5$ より，$f(n)=-3n-5$

したがって，$a_{n+1}=2a_n+3n+2$ は次のように変形できる。

$a_{n+1}=2a_n+(3n+2)$ を $a_{n+1}-f(n+1)=p\{a_n-f(n)\}$ の形にする。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=2a_n\quad+3n+2 \\ -) & f(n+1)=2f(n)+3n+2 \\ \hline & a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\} \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-f(n)\}$ は，初項 $a_1-f(1)=3-(-3-5)=3-(-8)=11$，公比2の等比数列より，

$$a_n-f(n)=11\times 2^{n-1}$$

$$a_n=11\times 2^{n-1}+f(n)$$

$$=11\times 2^{n-1}-3n-5$$

（3）$f(n)=an^2+bn+c$ とし，これを

$$f(n+1)=2f(n)+n^2-n+1$$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = & 2\,a_n & +\,(n^2-n+1) \\ \downarrow & \downarrow & \\ f(n+1)=a(n+1)^2+b(n+1)+c & f(n)=an^2+bn+c & \end{array}$$

に代入すると，

$a(n+1)^2+b(n+1)+c=2(an^2+bn+c)+n^2-n+1$

$an^2+2an+a+bn+b+c=2an^2+2bn+2c+n^2-n+1$

$(a+1)n^2+(-2a+b-1)n+(-a-b+c+1)=0$

この式が，すべての自然数 n に対して成り立つので，

$a+1=0$，$-2a+b-1=0$，$-a-b+c+1=0$

これを解いて，$a=-1$，$b=-1$，$c=-3$ より，

$$f(n)=-n^2-n-3$$

したがって，$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$ は次のように変形できる。

$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$ を $a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$ の形にする。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=2a_n\quad+n^2-n+1 \\ -) & f(n+1)=2f(n)+n^2-n+1 \\ \hline & a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\} \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-f(n)\}$ は，初項 $a_1-f(1)=0-(-1-1-3)=-(-5)=5$，公比2の等比数列より，

$$a_n-f(n)=5\times 2^{n-1}$$

$$a_n=5\times 2^{n-1}+f(n)$$

$$=5\times 2^{n-1}-n^2-n-3$$

漸化式

pattern 3　$a_{n+1}-a_n=f(n)$ 型

⇒**階差数列を利用**すればよい。　n をkに変えればよい。

つまり，$\boxed{n\geqq 2 \text{ のとき，} a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)}$ に**代入**すればよい。

(考え方) $a_{n+1}-a_n=f(n)$ について，

n に 1 を代入すると，　$a_2-a_1=f(1)$

n に 2 を代入すると，　$a_3-a_2=f(2)$

n に 3 を代入すると，　$a_4-a_3=f(3)$

n に 4 を代入すると，　$a_5-a_4=f(4)$

……

n に $n-1$ ($n\geqq 2$) を代入すると，$a_n-a_{n-1}=f(n-1)$

これらを辺々たすと，$a_n-a_1=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)$

よって，$n\geqq 2$のとき，$a_n=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^{n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n^2+n\quad (n=1,2,3,\cdots)$

解答 (1)

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots\cdots$
$1\quad 2\quad 2^2\quad 2^3\quad \cdots\cdots\quad 2^{n-2}\quad 2^{n-1}$

(2) $\boxed{n\geqq 2 \text{ のとき，} a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)}$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

上のnを$(n-1)$に書き替える。

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=2+\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}+\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$

$$=2+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=2+\frac{1}{6}(n^2-n)(2n-1)+\frac{1}{2}(n^2-n)$$

$$=2+\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$=2+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n+2 \qquad \cdots ①$$

ここで，$n=1$ を①に代入すると，$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2=a_1$ を得るので，①はすべての自然数 n について成り立つ。

よって，$a_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n+2$

$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ \cdots$
$1^2+1\quad 2^2+2\quad 3^2+3\quad (n-1)^2+(n-1)$

$a_{n+1}=a_n+n^2+n$ に$n=1,2,3,\cdots$を代入すると，

$a_2=a_1+1^2+1$

$a_3=a_2+2^2+2$

$a_4=a_3+3^2+3$

……

pattern 4　$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型

⇒ 手順1　**両辺を r^{n+1} で割る。**

$\boxed{\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{p}{r}\cdot\frac{a_n}{r^n}+\frac{q}{r}}$

$\boxed{b_{n+1}=\frac{p}{r}b_n+\frac{q}{r}}$

手順2　$b_n=\frac{a_n}{r^n}$ とおくと，

pattern 1　または　*pattern* 3 が利用できる。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+2\cdot 3^n\quad (n=1,2,3,\cdots)$

解答　両辺を　　　　で割ると，

漸化式

pattern 5　$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 型

⇒ 両辺の**逆数をとる**と，*pattern* 1　または　*pattern* 3 が利用できる。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　$a_1>0$ と $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ より，$a_n>0$

逆数をとるので分母にくる a_n や a_{n+1} が 0 でないことを確認しておこう。

与えられた漸化式の両辺の**逆数をとると**，

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{a_n}=1+\dfrac{2}{a_n}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+1$　… ①

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ **とおくと**，①は

$b_{n+1}=2b_n+1$，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$　… ②

ここで，$\alpha=2\alpha+1$ を解くと，$\alpha=-1$

したがって，② は次のように変形できる。

$b_{n+1}-(-1)=2\{b_n-(-1)\}$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

これより，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 $b_1+1=1+1=2$，公比 2 の等比数列だから，

$b_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$ より，$b_n=2^n-1$

よって，$\dfrac{1}{a_n}=2^n-1$ より，$a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$

pattern 6　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 型　（隣接３項間の関係）

⇒ $\boxed{\text{手順1}}$ $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ **の形に変形する。**

ただし，α，β **は**，$x^2-px-q=0$ …④　**の解**である。

証明　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ より，

$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$　… ①

与式より，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$　… ②

①＝②より，係数を比較すると，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$　… ③

③を満たす α，β は，$x^2-px-q=0$ …④の解である。

∵）　なぜならば，④の解は $x=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$

ここで，$\alpha=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$，$\beta=\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ とすると，

$\alpha+\beta=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}+\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}=p$

$\alpha\beta=\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\times\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}=\dfrac{p^2-(p^2+4q)}{4}=-q$

よって，④の解は③を満たす。

$\boxed{\text{手順2}}$ **④が異なる２つの実数解をもつ**ときは，*pattern* 0 を利用

④が重解をもつときは，*pattern* 4 を利用

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$　$(n=1,2,3,\cdots)$

(2)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ の a_{n+2} を x^2 に a_{n+1} を x に a_n を 1 に 書き替えた式だと覚えておいてください。

解答 (1)　$x^2+3x-4=0$ を解くと，

$(x+4)(x-1)=0$ より，$x=-4$，1

したがって，$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ を変形すると次のようになる。

$a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$　… ①

$a_{n+2}+4a_{n+1}=1\times(a_{n+1}+4a_n)$　… ②

①より，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると

$b_{n+1}=-4b_n$，$b_1=a_2-a_1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -4 の等比数列であるから

$b_n=(-4)^{n-1}$ より，$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$　… ③

また，②より，$c_n=a_{n+1}+4a_n$ とすると

$c_{n+1}=1\times c_n$，$c_1=a_2+4a_1=2+4=6$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 6，公比 1 の等比数列であるから

$c_n=6\times1^{n-1}=6$ より，$a_{n+1}+4a_n=6$　… ④

もっと簡単に考えると，$c_{n+1}=c_n$ より $c_{n+1}=c_n=c_{n-1}=\cdots=c_2=c_1=6$ よって，$c_n=6$

③－④より，$-5a_n=(-4)^{n-1}-6$

ゆえに，　$a_n=\dfrac{6-(-4)^{n-1}}{5}$

(2)　　　　　　を解くと，

したがって，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を変形すると，次のようになる。

①より，$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とすると，

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項　　　　，公比　　　　の等比数列であるから，

また，②より，$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とすると，

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項　　　　，公比　　　　の等比数列であるから，

pattern 6の続きです。

次のように定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。
(3)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　$x^2=6x-9$ を解くと，$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

よって，$x=3$

したがって，$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ は次のように変形できる。

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n) \quad \cdots ①$$

①において，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，

$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_2-3a_1=2-3=-1$

つまり，数列$\{b_n\}$は，初項-1，公比3の等比数列より，

$b_n=-1\times3^{n-1}$

$$a_{n+1}-3a_n=-1\times3^{n-1} \quad \cdots ②$$

②の両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{3a_n}{3^{n+1}}=\frac{-1\times3^{n-1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{-1}{3^2}=-\frac{1}{9}$$

ここで，$c_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$$c_{n+1}-c_n=-\frac{1}{9},\quad c_1=\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$$

これは，初項が$\frac{1}{3}$，公差が$-\frac{1}{9}$の等差数列を表すので，

$$c_n=\frac{1}{3}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}$$

よって，$\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}$ より，

$$a_n=3^n\left(-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}\right)$$
$$=-3^{n-2}\times n+4\times3^{n-2}$$
$$=(-n+4)\cdot3^{n-2}$$

pattern 7

S_n と a_n を含む漸化式

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} a_1=S_1 \\ n\geqq2 \text{ のとき，} a_n=S_n-S_{n-1} \end{array}}$ に**代入**する。

そして，S_n を消去する。（または a を消去する。）

次のように定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。ただし，S_nは，数列$\{a_n\}$の初項a_1から第n項a_nまでの和とする。

$S_n=n-a_n$

解答　$\boxed{a_1=S_1}$であり，与えられた$S_n=n-a_n$に$n=1$を代入すると，

$S_1=1-a_1$ であるから，$a_1=1-a_1$

よって，$a_1=\frac{1}{2}$

また，$\boxed{n\geqq2 \text{ のとき，} a_n=S_n-S_{n-1}}$ であるから，

$a_n=(n-a_n)-\{(n-1)-a_{n-1}\}$

ゆえに，$2a_n=a_{n-1}+1$ より，

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}$$　　pattern 1を使う。

ここで，$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$ を解くと，$\alpha=1$

したがって，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}$ は次のように変形できる。

$$a_n-1=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)\quad(n=2,3,4,\cdots)$$

これは，数列$\{a_n-1\}$が，初項$a_1-1=-\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列であることを表しているので，$a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって，　$a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

a_1-1，a_2-1，a_3-1，a_4-1，$\cdots$，$a_{n-1}-1$，a_n-1，$a_{n+1}-1$，$\cdots$
$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$　$\cdots$　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$

漸化式

pattern 8　$\begin{cases} a_{n+1}=Aa_n+Bb_n \\ b_{n+1}=Ca_n+Db_n \end{cases}$ 型　(連立漸化式)

⇒　辺々加える。　または　b_n を消去する。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=6$，$b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3b_n$　…①，$b_{n+1}=2a_n+2b_n$　…②　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　①より，$3b_n=a_{n+1}-a_n$

よって，$b_n=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$　…　③

また，①において，n を $n+1$ に変えると，$b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+2}-a_{n+1})$　…　④

③，④を②に代入すると，

$\frac{1}{3}(a_{n+2}-a_{n+1})=2a_n+2\cdot\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$\frac{1}{3}a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$

$\frac{1}{3}a_{n+2}-a_{n+1}-\frac{4}{3}a_n=0$

$a_{n+2}-3a_{n+1}-4a_n=0$

ここで，$x^2-3x-4=0$ を解くと，$(x-4)(x+1)=0$

よって，$x=4,-1$

したがって，$a_{n+2}-3a_{n+1}-4a_n=0$ は，次のように変形できる。

$a_{n+2}+a_{n+1}=4(a_{n+1}+a_n)$　…　⑤

$a_{n+2}-4a_{n+1}=-1\times(a_{n+1}-4a_n)$　…　⑥

ここで，①に，$n=1$ を代入すると，

$a_2=a_1+3b_1=6+3=9$

②に，$n=1$ を代入すると，

$b_2=2a_1+2b_1=12+2=14$

よって，⑤より，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は，初項 $a_2+a_1=9+6=15$，公比4の等比数列より，

$a_{n+1}+a_n=15\times4^{n-1}$　…　⑦

また，⑥より，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は，初項 $a_2-4a_1=9-24=-15$，公比−1の等比数列より，

$a_{n+1}-4a_n=-15\times(-1)^{n-1}$　…　⑧

⑦−⑧より，$5a_n=15\times4^{n-1}+15\times(-1)^{n-1}$

よって，$a_n=3\times4^{n-1}+3\times(-1)^{n-1}$　…　⑨

ここで，⑨を③に代入すると，

$b_n=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$=\frac{1}{3}[\{3\times4^n+3\times(-1)^n\}-\{3\times4^{n-1}+3\times(-1)^{n-1}\}]$

$=4^n+(-1)^n-4^{n-1}-(-1)^{n-1}$

$=4\times4^{n-1}-4^{n-1}-1\times(-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}$

$=3\times4^{n-1}-2\times(-1)^{n-1}$

pattern 9　$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型

⇒　$(n+1)$ 関係のもの ＝ n 関係のもの　という形にする。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（1）　$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

（2）　$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n+1$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答（1）　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$

ゆえに，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots\cdots=\frac{a_1}{1}$

よって，$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$　より，$a_n=n$

（2）　漸化式の両辺を $(n+2)$ で割ると，$\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n+2}$

この式の両辺を $(n+1)$ で割ると，

$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)n}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$　　pattern 3

ここで，$b_n=\frac{a_n}{(n+1)n}$ とおくと，　$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，$b_1=\frac{2}{2\cdot1}=1$

よって，$n\geqq2$ のとき，

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=1+\left\{\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$

$=1+\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{2(n+1)+(n+1)-2}{2(n+1)}$

$=\frac{3n+1}{2(n+1)}$

ここで，$\frac{3n+1}{2(n+1)}$ に $n=1$ を代入すると，$\frac{3+1}{2\cdot2}=1=b_1$ を得る。

よって，$b_n=\frac{3n+1}{2(n+1)}$

ゆえに，$\frac{a_n}{(n+1)n}=\frac{3n+1}{2(n+1)}$ より，$a_n=\frac{n(3n+1)}{2}$

漸化式

pattern 10　指数の入った漸化式
⇒ 両辺に対数をとる。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
$a_1=\sqrt{5}$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n}$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　$a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ の両辺に１０を底にもつ対数をとると，

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{a_n}=\log_{10}a_n^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}a_n$$

$A=B$
$\Rightarrow \log_{10}A=\log_{10}B$

ここで，$b_n=\log_{10}a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n,\quad b_1=\log_{10}a_1=\log_{10}\sqrt{5}=\log_{10}5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}5$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $\frac{1}{2}\log_{10}5$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より，

$$b_n=\frac{1}{2}(\log_{10}5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\log_{10}5=\log_{10}5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ゆえに，$\log_{10}a_n=\log_{10}5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ だから，

$$a_n=5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

対数の性質
$a>0$，$a\neq1$，$c>0$，$c\neq1$，$M>0$，$N>0$ のとき，
(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
(3) $\log_a M^r=r\log_a M$
(4) $\log_a M=\frac{\log_c M}{\log_c a}$

pattern 11　階差化をはかる。

例　$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$ を，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)$ のようにし，
$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}-b_n$ となり，*pattern* 3が使える。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
$a_1=2$，$a_2=0$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$　$(n=1,2,3,\cdots)$

別解　$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$

$$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2n-8$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=2n-8$，$b_1=a_2-a_1=0-2=-2$
よって，$n\geqq2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-8)$$
$$=-2+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}8$$
$$=-2+2\times\frac{(n-1)n}{2}-8(n-1)$$
$$=-2+n^2-n-8n+8$$
$$=n^2-9n+6\quad\cdots\quad①$$

①に $n=1$ を代入すると，$1-9+6=-2=b_1$ を得る。

よって，$b_n=n^2-9n+6$ より，$a_{n+1}-a_n=n^2-9n+6$
さらに，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-9k+6)$$
$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}k^2-9\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}6$$
$$=2+\frac{(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}}{6}-9\times\frac{(n-1)\{(n-1)+1\}}{2}+6(n-1)$$
$$=2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{9(n-1)n}{2}+6(n-1)$$
$$=\frac{12+(2n^3-3n^2+n)-(27n^2-27n)+(36n-36)}{6}$$
$$=\frac{2n^3-30n^2+64n-24}{6}$$
$$=\frac{n^3-15n^2+32n-12}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(n-2)(n^2-13n+6)\quad\cdots\quad②$$

②に $n=1$ を代入すると，

$\frac{1}{3}(1-2)(1-13+6)=2=a_1$ を得る。

よって，$a_n=\frac{1}{3}(n-2)(n^2-13n+6)$

漸化式

pattern 12　*pattern* 0〜11 があてはまらない漸化式

⇒ 手順1　$n=1,2,3,4,5,\cdots$ を与えられた漸化式に代入して，
a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，… を求める。

手順2　一般項 a_n を推定する。

手順3　推定した一般項 a_n を数学的帰納法で証明する。

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$　$(n=1,2,3,\cdots)$

解答　$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$ において，

$n=1$ を代入すると，$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$

$n=2$ を代入すると，$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{7}{5}}=\frac{5}{7}$

$n=3$ を代入すると，$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{1}{2-\frac{5}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$

よって，数列 $\{a_n\}$ は，　$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{7}{9}$，……　となっている。

これから，分子の数列 $\{b_n\}$ は，　1，3，5，7，……

より，初項1，公差2の等差数列だから，　$b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

また，分母の数列 $\{c_n\}$ は，　3，5，7，9，……

より，初項3，公差2の等差数列だから，　$c_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

よって，$a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$　……①　と推定される。

次に，すべての自然数 n について，①が正しいことを証明する。

（Ⅰ）$n=1$ のとき，$a_1=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$ だから，①は正しい。

（Ⅱ）$n=k$ のとき，①が正しいと仮定すると，$a_k=\frac{2k-1}{2k+1}$ だから，

$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}$