数学演習　No.

等式の証明(まとめ)

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

Point　等式 A＝B の証明方法
1　Aを変形してB（Bを変形してA）を導く。
2　AとBをそれぞれ変形して，同じ式を導く。
3　A−B を計算して，0であることを示す。

1　単純変形法

問1　次の等式を証明せよ。
(1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
(3) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

証明(1) (左辺)$=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)=$(右辺)

(2) (左辺)$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=$(右辺)

(3) (右辺)$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$
$=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2$
$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$
$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$(左辺)

2　代入法（文字の消去を行う。）

問2　$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。
(1) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3=0$　ただし $abc\neq 0$
(2) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

証明
$a+b+c=0$ から　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

対称性に注目して考えることができる。

(1) (左辺)$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3=-1-1-1+3=0$

別解　$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$

文字の消去をする。

(左辺)$=\frac{b-a-b}{a}+\frac{-a-b+a}{b}+\frac{a+b}{-a-b}+3$
$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{a+b}{-(a+b)}+3$
$=-1-1-1+3$
$=0$

(2) (左辺)$=(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)+abc=-abc+abc=0$
別解　$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$
よって，(左辺)$=(a+b)(-a)(-b)+ab(-a-b)=(a+b)ab-ab(a+b)=0$

3　消去法　（結論にない文字を消去する。）

問3　$y+\frac{1}{z}=1$，$z+\frac{1}{x}=1$ のとき，$x+\frac{1}{y}=1$ が成り立つことを証明せよ。

証明　$y+\frac{1}{z}=1$ より，$\frac{1}{z}=1-y$　…①
$z+\frac{1}{x}=1$ より，$z=1-\frac{1}{x}$　…②
①×② より，$\frac{1}{z}\cdot z=(1-y)\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{x}-y+\frac{y}{x}$
よって，$y+\frac{1}{x}=\frac{y}{x}$
$xy+1=y$
ここで，$y=0$ とすると，$1=0$ となるので，$y\neq 0$
したがって，両辺を y で割ると，
$x+\frac{1}{y}=1$

4　比例式は k とおく。

問4　次のことが成り立つことを証明せよ。
(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき，$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}$

証明(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ **とおく**と　$a=bk$，$c=dk$
$\frac{a-b}{b}=\frac{bk-b}{b}=k-1$，　$\frac{c-d}{d}=\frac{dk-d}{d}=k-1$
よって，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ **とおく**と　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$
$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ak+bk+ck}{a+b+c}=k$，　$\frac{x}{a}=\frac{ak}{a}=k$
よって　$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}$

5　因数分解法（「少なくとも～」のときの証明は，（積）＝0を作る。）

問5　$x+y+z=1$，$xy+yz+zx-xyz=0$ ならば，x，y，z のうち少なくとも1つは 1 であることを示せ。

証明　$(x-1)(y-1)(z-1)=(xy-x-y+1)(z-1)$
$=xyz-xy-xz+x-yz+y+z-1$
$=-(xy+yz+zx-xyz)+(x+y+z)-1$
$=0+1-1$
$=0$
よって，$x-1=0$ または $y-1=0$ または $z-1=0$ であるから，
x，y，z のうち少なくとも1つは 1 である。

6　平方の和をつくる。

問6　$x^2+y^2+z^2=4(x+y+z-3)$ のとき，$x=y=z=2$ であることを証明せよ。ただし，x，y，z は実数とする。

証明　$x^2+y^2+z^2-4(x+y+z-3)=0$
$x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+12=0$
$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4)=0$
$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0$
x，y，z は実数だから，$x-2=0$，$y-2=0$，$z-2=0$
よって，$x=y=z=2$

7　関数方程式の問題（x，y に適当な値を代入する。）

問7　関数 $f(x)$ が正で，x，y の値にかかわらず常に $f(x+y)=f(x)f(y)$ が成り立つとき，次の等式を証明せよ。
(1) $f(0)=1$
(2) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

証明(1) $x=0$，$y=0$ を代入すると，$f(0+0)=f(0)f(0)$
$f(0)=f(0)f(0)$
$f(0)>0$ より，両辺 $f(0)$ で割ると，
よって，$f(0)=1$

(2) $y=-x$ を代入すると，$f(x-x)=f(x)f(-x)$
$f(0)=f(x)f(-x)$
$1=f(x)f(-x)$
$f(x)>0$ より，両辺 $f(x)$ で割ると，
$f(-x)=\frac{1}{f(x)}$