数学演習　No.　　**不等式の証明(まとめ)**　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

Point　等式 $A>B$ の証明方法

1　$A-B$を計算して，0より大きいことを示す。
2　$A\geqq 0$，$B\geqq 0$ のとき，$A>B \Leftrightarrow A^2>B^2$
3　特殊な不等式（公式）を使って示す。

1　$A-B$を計算して，0より大きいことを示す。

(1)　$A-B=(\quad)(\quad)(\quad)$ のように因数分解する。

問1　次のことを証明せよ。
$a>b$，$c>d \Longrightarrow ac+bd>ad+bc$

証明　$(ac+bd)-(ad+bc)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$
$a>b$，$c>d$ から　$a-b>0$，$c-d>0$
$(a-b)(c-d)>0$
よって　$ac+bd>ad+bc$

(2)　$A-B=(\quad)^2+(\quad)^2+\cdots+(\quad)^2$ の形を作る。

問2　次の不等式を証明せよ。また，(2)，(3) は等号が成り立つ場合を調べよ。
(1)　$a^2+11>6a$
(2)　$4a^2\geqq 3b(4a-3b)$
(3)　$2a^2\geqq 3ab-2b^2$

証明 (1)　$(a^2+11)-6a=a^2-6a+11$
$=(a^2-6a+9)+11-9=(a-3)^2+2>0$
よって，$a^2+11>6a$

(2)　$4a^2-3b(4a-3b)=4a^2-12ab+9b^2=(2a-3b)^2\geqq 0$
よって，$4a^2\geqq 3b(4a-3b)$
等号が成り立つのは $2a=3b$　すなわち　$a=\frac{3}{2}b$ の場合である。

(3)　$2a^2-(3ab-2b^2)=2\left\{a^2-\frac{3}{2}ab+\left(\frac{3}{4}b\right)^2\right\}-2\left(\frac{3}{4}b\right)^2+2b^2$
$=2\left(a-\frac{3}{4}b\right)^2+\frac{7}{8}b^2\geqq 0$
よって，$2a^2\geqq 3ab-2b^2$
等号が成り立つのは，$a-\frac{3}{4}b=0$ かつ $b=0$
すなわち，$a=b=0$ の場合である。

(3)　$A-B=$(正または0)+(正または0)$+\cdots+$(正または0) の形を作る。

問3　次の不等式を証明せよ。
$a\geqq 2$，$b\geqq 2$，$c\geqq 2$ ならば，$abc>a+b+c$

証明　$a\geqq 2$ より，$a-2\geqq 0$　ここで，$a-2=X$ とおくと，$X\geqq 0$　また，$a=X+2$
$b\geqq 2$ より，$b-2\geqq 0$　ここで，$b-2=Y$ とおくと，$Y\geqq 0$　また，$b=Y+2$
$c\geqq 2$ より，$c-2\geqq 0$　ここで，$c-2=Z$ とおくと，$Z\geqq 0$　また，$c=Z+2$

$abc-(a+b+c)=(X+2)(Y+2)(Z+2)-\{(X+2)+(Y+2)+(Z+2)\}$
$=(XY+2X+2Y+4)(Z+2)-(X+Y+Z+6)$
$=XYZ+2XY+2ZX+4X+2YZ+4Y+4Z+8-X-Y-Z-6$
$=XYZ+2(XY+YZ+ZX)+3(X+Y+Z)+2$
ここで，$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$，$Z\geqq 0$ より，
$XYZ\geqq 0$，$2(XY+YZ+ZX)\geqq 0$，$3(X+Y+Z)\geqq 0$
より，$abc-(a+b+c)\geqq 0$
よって，$abc\geqq a+b+c$

2　平方して差をとる。

問4　(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{4a+9b}<2\sqrt{a}+3\sqrt{b}$ を証明せよ。
(2)　$a>b>0$ のとき，$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ を証明せよ。

証明 (1)　$(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+9b})^2=(4a+12\sqrt{ab}+9b)-(4a+9b)=12\sqrt{ab}>0$
よって　$(\sqrt{4a+9b})^2<(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2$
$\sqrt{4a+9b}>0$，$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$ であるから，$\sqrt{4a+9b}<2\sqrt{a}+3\sqrt{b}$

(2)　$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)=2\sqrt{ab}-2b$
$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
$a>b>0$ から，$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$　より　$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$
ゆえに　$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a-b}>0$ であるから　$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

3　特殊不等式を利用する。

(1)　相加平均と相乗平均の関係を利用する。

Point　相加平均と相乗平均の関係

$a>0$，$b>0$ のとき，$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
等号は，$a=b$ のとき成り立つ。
実際には，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ の形で使うことが多い。

重要

証明　$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$
$=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{4ab}{4}$
$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$
$=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$　…①
よって，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq(\sqrt{ab})^2$　$\frac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ より，$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
①より，等号は，$a=b$ のときに成り立つ。

問5　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。
(1)　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$
(2)　$\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b}\geqq 2$
(3)　$\frac{2}{a+b}+2a+2b\geqq 4$
(4)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqq 9$

証明　相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$a>0$ であるから　$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$
等号は，$a=\frac{1}{a}$　つまり，$a^2=1$ から，$a=1$ のとき成り立つ。

(2)　$a>0$，$b>0$ であるから　$\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b}\geqq 2\sqrt{\frac{3b}{2a}\cdot\frac{2a}{3b}}=2$
等号は，$\frac{3b}{2a}=\frac{2a}{3b}$　つまり，$(3b)^2=(2a)^2$ から，$3b=2a$ のとき成り立つ。

(3)　$a+b>0$ であるから，(左辺)$=\frac{2}{a+b}+2(a+b)\geqq 2\sqrt{\frac{2}{a+b}\cdot 2(a+b)}=4$
等号は，$\frac{2}{a+b}=2(a+b)$　つまり，$(a+b)^2=1$ から，$a+b=1$ のとき成り立つ。

(4)　$x^2>0$，$\frac{4}{x^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均との関係より，
(左辺)$=x^2+4+1+\frac{4}{x^2}\geqq 5+2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=5+2\sqrt{4}=9$
等号は，$x^2=\frac{4}{x^2}$　つまり，$x^4=4$ から，$x^2>0$より，$x^2=2$
すなわち　$x=\sqrt{2}$ のとき成り立つ。

(2) シュワルツ（コーシー）の不等式を利用する。

Point　シュワルツ（コーシー）の不等式
(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$
等号は，$a:b=x:y$ のとき成り立つ。
(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$
等号は，$a:b:c=x:y:z$ のとき成り立つ。

証明 (1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$
$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$
$=(ay-bx)^2 \geqq 0$　…①
よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$
等号は，①より，$ay=bx$
つまり，$a:b=x:y$ のとき成り立つ。

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$
$\quad -a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx$
$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2+c^2y^2-2bcyz+b^2z^2+a^2z^2-2cazx+c^2x^2$
$=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2 \geqq 0$　…②
よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$
等号は，②より，$bx=ay$，$cy=bz$，$az=cz$
つまり，$a:b:c=x:y:z$ のとき成り立つ。

問6　次の不等式を証明せよ。
(1) $5(x^2+y^2) \geqq (x+2y)^2$
(2) $14(x^2+y^2+z^2) \geqq (3x-2y-z)^2$

証明 (1) シュワルツの不等式より，
$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geqq (1\cdot x+2\cdot y)^2$
よって，$5(x^2+y^2) \geqq (x+2y)^2$
等号は，$x:y=1:2$ のときに成り立つ。
(2) シュワルツの不等式より，
$\{3^2+(-2)^2+(-1)^2\}(x^2+y^2+z^2) \geqq (3x-2y-z)^2$
よって，　$14(x^2+y^2+z^2) \geqq (3x-2y-z)^2$
等号は，$x:y:z=3:(-2):(-1)$ のとき成り立つ。

(3) 三角不等式を利用する。

Point　三角不等式
$|a+b| \leqq |a|+|b|$
等号は，$ab \geqq 0$ のとき成り立つ。

証明　$|a+b| \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$ だから平方して比べると，
$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|ab|+|b|^2-(a^2+2ab+b^2)$
$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$
$=2|ab|-2ab=2(|ab|-ab) \geqq 0$　…①
よって　$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \geqq 0$ より，$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$
ゆえに，$|a+b| \leqq |a|+|b|$
等号は，①より，$|ab|=ab$ のとき
つまり，$ab \geqq 0$ のとき成り立つ。

問7　次の不等式を証明せよ。
$|a|-|b| \leqq |a-b|$

証明　三角不等式より，
$|(a-b)+b| \leqq |a-b|+|b|$
$|a| \leqq |a-b|+|b|$ より，　$|a|-|b| \leqq |a-b|$
等号は，$(a-b)b \geqq 0$ のとき，成り立つ。

4　特殊不等式を利用した最大・最小問題
(1) 相加平均と相乗平均の関係を利用する。
(2) シュワルツ（コーシー）の不等式を利用する。
(3) 判別式を利用する。

問8　(1) $x>0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。
(2) $x-2>0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x-2}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(解) (1) $x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均との関係より，
$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$
等号が成立するのは，$x=\dfrac{1}{x}$ のとき，$x^2=1$ と $x>0$ から，$x=1$
よって，$x=1$ のとき，最小値2
(2) $x-2>0$，$\dfrac{1}{x-2}>0$ より，相加平均と相乗平均との関係より，
$$x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2 \geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=2+2=4$$
等号が成立するのは，$x-2=\dfrac{1}{x-2}$ のとき，
$(x-2)^2=1$ と $x-2>0$ から，$x=2$
よって，$x=2$ のとき，最小値4

問9　$2x+3y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(解)　シュワルツの不等式より，
$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geqq (2x+3y)^2$
ここで $2x+3y=1$　……① であるから
$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geqq 1$
よって，$x^2+y^2 \geqq \dfrac{1}{13}$
等号が成り立つのは，$x:y=2:3$　……② のときである。
$2y=3x$　より，$y=\dfrac{3}{2}x$　……②
②を①に代入すると　$2x+\dfrac{9}{2}x=1$
$\dfrac{13}{2}x=1$　より，$x=\dfrac{2}{13}$
このとき，②より，$y=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{13}=\dfrac{3}{13}$
ゆえに，x^2+y^2 は $x=\dfrac{2}{13}$，$y=\dfrac{3}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{13}$ をとる。

問10　x，y が実数で，$x^2+y^2=2x$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(解)　$x+y=k$ とおいて，$y=k-x$ を $x^2+y^2=2x$ に代入すると，
$x^2+(k-x)^2=2x$
$x^2+k^2-2kx+x^2=2x$
$2x^2-2(k+1)x+k^2=0$
x は実数だから，判別式を D とすると，
$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-2k^2 \geqq 0$
$k^2+2k+1-2k^2 \geqq 0$
$k^2-2k-1 \leqq 0$
$1-\sqrt{2} \leqq k \leqq 1+\sqrt{2}$
よって，最大値 $1+\sqrt{2}$，最小値 $1-\sqrt{2}$